ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

>>*<<

SESSION 1974

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

La correction tiendra le plus grand compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la précision de la rédaction.
Les candidats devront respecter les notations des énoncés.

>>>>>>**<<<<<<

Dans ce problème toutes les courbes sont tracées dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. On posera $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Lors du tracé des courbes représentatives demandées, un point litigieux pourra, s'il appartient à la courbe, être représenté par une tache ronde appuyée et, s'il n'appartient pas à la courbe être entouré d'un petit cercle centré au point considéré.

I - Soit la fonction $f(x)$ définie pour $x \notin \{2,4\}$ donc pour $x \neq 2$ et $x \neq 4$ par

$$f(x) = \frac{2(x-3) - (x-3)^2}{(x-3)^2 - 1}$$

1°/ Construire sa courbe représentative.

2°/ Montrer que pour $a \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(\{a\})$ est en général réduit à deux points.

3°/ Montrer que pour $x \in \mathbb{R} - \{2,4\}$, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est en général réduit à deux points.

II - Soit $y(x)$ la fonction définie pour $x \notin \{2,4\}$ par

$$x \longmapsto y(x) = \sup f^{-1}(\{f(x)\})$$

1°/ Montrer que y est définie, continue, dérivable.

2°/ Construire la courbe représentative de y .

3°/ On désigne par $\bar{y}$ l'application y prolongée par continuité. Définir $\bar{y}$.

4°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, donc $0 \leq n$, on pose $\bar{y}(n+1) = a_n$ et on considère la série de terme général $a_n x^n$.

a) Donner son intervalle de convergence.

b) Donner son domaine de convergence.

c) Donner pour $|x| < 1$ sa somme.

5°/ Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = \dfrac{1}{\bar{y}\left(\frac{n}{2}+3\right) - \frac{11}{4}}$ et on considère la série de terme général $b_n x^n$.

a) Donner son intervalle de convergence.

b) Donner son domaine de convergence.

c) L'intervalle $]-1,+1[$ est-il de convergence uniforme ?

d) L'intervalle $]-1, \frac{1}{2}]$ est-il de convergence uniforme ?

Les deux questions précédentes sont à démontrer et non pas à affirmer ou à infirmer compte tenu d'un quelconque théorème.

e) Donner la somme de la série de terme général $b_n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

f) Donner la somme de la série de terme général $b_n \cdot (-1)^n$.

6°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $s_n = \sin\left(\bar{y}(n+\frac{13}{4})\right)$. Calculer pour $|x| < 1$ la somme de la série de terme général $s_n \cdot x^n$.

II - 1°/ Construire la courbe γ d'équation $x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$.

2°/ P étant un polynôme réel du troisième degré $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx$ on désigne par Γ la courbe d'équation $P(x) = P(y)$. Déterminer P pour que $\gamma \subset \Gamma$.

3°/ Construire Γ.

4°/ Construire la courbe d'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{P(x)}$.

5°/ Construire la courbe d'équation $f(x)$ définie par $f(x) = \sup\left[\varphi^{-1}(\{\varphi(x)\})\right]$.

On distinguera les courbes du (III, 1°/ 4°/ 5°/) en utilisant au besoin des traits différents ou des couleurs différentes.

IV - Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation : $F(x) = F(y)$ (1)

où : $$F(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-16)}{x(x^2-9)(x^2-25)} - 1 \quad .$$

1°/ Montrer que pour $x \notin D = \{-5,-3,0,3,5\}$ il existe en général cinq valeurs réelles de y vérifiant (1).

2°/ On pose :

$$z(x) = \sup\left[F^{-1}(\{F(x)\})\right]$$

a) Construire la courbe représentative des variations de z.

b) Soit $\bar{z}$ l'application $z(x)$ prolongée par continuité. Pour $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ on pose $\alpha_n = \bar{z}(n)$; pour $n = 1$, on a $\alpha_1 = 1$.
Calculer pour $|x| < 1$ la somme de la série de terme général $\alpha_n \cdot x^n$ où $x^0 = 1$.

>>>*<<<

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail